Competencia trasversal MATEMÁTICAS

GC-F-004v.04

AMBIENTE

Instructor: **Fredy Alberto Jaimes Muñoz**
Centro de Servicios y Gestión Empresarial

Libros de combate:

- **Álgebra, trigonometría y geometría analítica**; Dennis G. Zill, Tercera Edición.
- **Cálculo de una variable;** JAMES STEWART, Sexta Edición.
- **Matemáticas Simplificadas;** PEARSON, Segunda Edición.
- **Estadística de Schaum;** Murray R. Spiegel, Cuarta Edición.

Actividades de Reflexión inicial

La denominación de la sociedad del conocimiento se fundamenta en primera instancia en la cantidad de datos que se tienen actualmente, la cual, se presenta de forma exponencial, y segundo, por la capacidad que deben tener los ciudadanos o integrantes de esta sociedad para identificar, seleccionar o categorizar estos tipos de datos para posteriormente convertirlos en información y conocimiento. La investigación formativa y aplicada puede ser una de estas herramientas para identificar el proceso formativo como un espacio de comprender la realidad del sujeto dentro de un contexto (Cruz Ventura, Bastida Muñoz, & García Oaxaca, 2018), este entendimiento de la realidad debe ser generado por cada persona para evitar el sesgo de la interpretación del docente o del interlocutor Los procesos de aprendizaje se caracterizan hoy en día en darle la oportunidad al estudiante de adquirir conocimientos, destrezas y habilidades que le permitan a él desarrollar de forma autónoma su continua formación.

Actividades de contextualización e identificación de conocimientos necesarios para el aprendizaje.

AA1. Elaborar una lluvia de ideas y un diagrama de afinidad sobre los casos, en los cuales, desde su que hacer profesional, deberá usar las matemáticas

preguntas:

¿Cómo se relaciona las matemáticas al contexto de mi ejercicio profesional? Y ¿Dentro de las ramas de la matemáticas socializadas cuales consideran que se aplican más a mi quehacer como futuro profesional y por qué?

Mínimo 10 ideas a través de la técnica de Brainstorming. (*Def. Aportación de ideas que varias personas ponen en común como punto de partida para un proyecto*.)

Actividad final: socializará el mapa mental a través de un video o presentación de 5 minutos, esta exposición la podrá realizar en las herramientas (Prezi; video en formato AVI o Mp4; o cualquier herramienta de Microsoft office)

Números Reales y sus Características

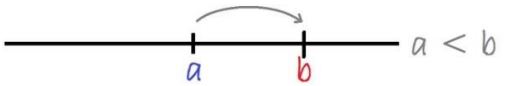
Los números reales son todos números que están representados como puntos en la recta real. Este conjunto está formado por la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales. Se representa con la letra $\Re$.

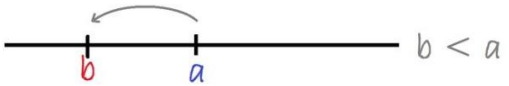
- **Infinitud**

El conjunto de los números reales tiene una cantidad infinita de elementos, es decir, no tienen final, ya sea del lado positivo como del negativo.

- **Orden**

En la recta real el orden de los números se conoce por su posición en la recta, mientras más a la derecha está un número, es más grande, en contraste, mientras más la izquierda es menor. Si tomamos dos números reales distintos cualesquiera que llamamos a y b, entonces sucede una de dos posibilidades: a < b, en otras palabras, b esta a la derecha de a y por lo tanto es mayor, o b está a la izquierda de a, de forma que es menor, o sea b En consecuencia, podemos ordenar a los números reales.





Números Reales y sus Características

- **Integral**

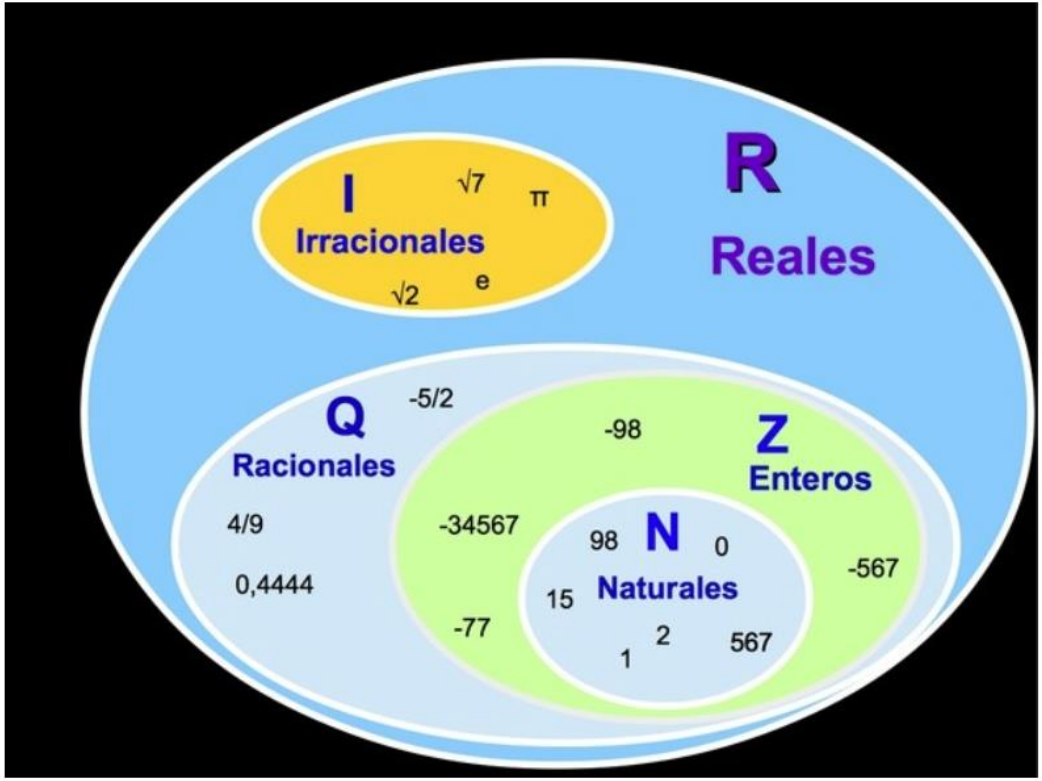
La característica de integridad de los números reales quiere decir que no hay espacios vacíos en este conjunto de números. Matemáticamente, esto se formula como que cada conjunto tiene un límite superior, y tiene un límite más pequeño.

- **Expansión decimal**

Cada número real se puede ser expresado como un decimal cuya expansión decimal puede ser finita o infinita. Los números irracionales tienen cifras decimales interminables e irrepetibles, por el ejemplo, el número pi π es aproximadamente 3,14159265358979..., mientras que los racionales tienen expansiones finitas (ósea que se terminan) como por ejemplo 0,25 o bien, infinitas pero periódicas (es decir que se repiten) como 3,333...

Se usan en mediciones de cantidades continuas, como la longitud y el tiempo.

Clasificación de los Números Reales



Conjuntos de los números reales.

Subconjuntos de los Números Reales

- **Números naturales**

De la necesidad de contar objetos surgieron los números naturales. Estos son los números son: $1, 2, 3, 4, 5, 6,$ …hasta el infinito. El conjunto de los números naturales se designa con la letra mayúscula N.

- **Números enteros**

El conjunto de los números enteros comprende los números naturales y sus números simétricos, o sea, los quedan del otro lado de la recta. Esto incluye los enteros positivos, el cero y los enteros negativos. Los números negativos se denotan con un signo "menos" (-). Se designa por la letra mayúscula Z

- **Números racionales**

Los números racionales, que también se conocen como fraccionarios, surgen por la necesidad de medir cantidades que no necesariamente son enteras. Medir magnitudes continuas tales como la longitud, el volumen y el peso, llevó al hombre a introducir las fracciones. El conjunto de números racionales se designa con la letra Q:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| \; p,q \in Z \; , \; q \neq 0 \right\}$$

- **Números irracionales**

Los números irracionales comprenden los números que no pueden expresarse como la división de enteros en el que el denominador es distinto de cero. Se representa por la letra mayúscula I. Aquellas magnitudes que no pueden expresarse en forma entera o como fracción son también irracionales. Por ejemplo, la relación de la circunferencia al diámetro de una circunferencia es el número $\pi = 3{,}141592$ …

Propiedades de los Números Reales

Los números reales tienen la propiedad de que con ellos se pueden hacer dos operaciones básicas que se conocen como suma y producto (o multiplicación), y cumplen lo siguiente:

1. La suma de dos números reales tiene como resultado otro número real, a esto se le conoce como ser cerrada, es decir, si $a\ y\ b\ \in\ \Re$, entonces $a + b\ \in\ \Re$.
2. La suma de dos números reales es conmutativa, entonces $a + b = b + a$.
3. La suma de números es asociativa, es decir, $(a + b) + c =\ a + (b + c)$.
4. La suma de un número real y cero es el mismo número; $a + 0 = a$.
5. Para cada número real existe otro número real simétrico, tal que su suma es igual a 0: $a + (-a) = 0$
6. La multiplicación de dos números reales es cerrada: $si\ a\ y\ b\ \in\ \Re, entonces\ a\ .\ b\ \in\ \Re$.
7. La multiplicación de dos números es conmutativa, $entonces\ a\ .\ b =\ b.\ a$.
8. El producto de números reales es asociativo: $(a.\ b).\ c =\ a.\ (b\ .\ c)$
9. En la multiplicación, el elemento neutro es el 1: entonces, $a\ .\ 1 =\ a$.
10. Para cada número real a diferente de cero, existe otro número real llamado el inverso multiplicativo, tal que: a . $a - 1\ =\ 1$.
11. Si $a, b\ y\ c\ \in\ \Re$, entonces $a(b + c) =\ (a\ .\ b)\ +\ (a\ .\ c)$

Jerarquía de operaciones

En matemáticas, la jerarquía de operaciones se refiere al orden en que se deben realizar las operaciones matemáticas. Imaginemos la siguiente situación: $2 + 3\,x\,4 - 5 \div 5$
Podríamos hacer el siguiente cálculo:

1. primero sumamos $2 + 3$, luego multiplicamos por 4, a eso le restamos 5, y finalmente dividimos por 5. O
2. podríamos sumar 2 más 3, restar 4 y 5, multiplicar eso resultado y dividir al final por 5.

En cualquiera de los dos casos, el resultado es diferente. Por eso, existen unas reglas o instrucciones que se deben seguir para que una serie de operaciones matemáticas siempre sea resuelta de la misma forma. De esta forma, en la expresión $2 + 3\,x\,4 - 5 \div 5$ el resultado correcto es 13 porque:

- primero se realizan las multiplicaciones y divisiones: $3\,x\,4 = 12,$ luego, $-5 \div 5 = 1$
- luego se realizan las sumas y restas en el sentido de izquierda a derecha: $2 + 12 = 14,$ por ultimo, $14 - 1 = 13$.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una **ecuación de primer grado** es una ecuación cuya solución viene dada por Primero, el producto de sus variables (en este caso, x), y el valor medio de sus fórmulas integrales, como la matriz integral. Una ecuación de segundo grado es lo contrario de su homóloga de primer grado. Así, una solución de una ecuación de primer grado será siempre la suma de sus variables, mientras que las soluciones de una ecuación de segundo grado serán siempre iguales a los valores de primer grado de sus correspondientes variables. Además, las soluciones de las ecuaciones de tercer grado también son iguales a los valores de sus correspondientes variables, pero esto ocurre raramente**.**

En general para resolver una ecuación de primer grado debemos seguir los siguientes pasos*:*

1. Eliminar paréntesis.
2. Eliminar denominadores.
3. Agrupar los términos en $\{x\}$ en un miembro y los términos independientes en el otro.
4. Reducir los términos semejantes.
5. Despejar la incógnita.

EJEMPLOS:

Resolver $2(x+1)-3(x-2)=x-6$

Resolver $\frac{x+1}{6}-\frac{3(x-2)}{8}=x-6$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Ejercicios para practicar**: resolver la siguientes ecuaciones de primer grado**.

1. $2 - x = x - 8$
2. $2x - 1 = 5x + 8$
3. $3 + 3x - 1 = x + 2 + 2x$
4. $2(1 + 2x) = 10$
5. $2(3x - 2) = 2$
6. $-2(3x - 2) = -2$
7. $1 - \frac{x}{3} = \frac{5x}{3}$
8. $\frac{2x}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{4x}{2}$
9. $1 + \frac{1}{2}(4x - 6) = -2$
10. $5 - 2(1 - x) = 2x - 3$

SISTEMA DE ECUACIONES

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas en la que deseamos encontrar una solución común.
En esta ocasión vamos a resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Una ecuación lineal con dos incógnitas es una igualdad del tipo $ax + by = c$, donde a, b, y c son números, y «x» e «y» son las incógnitas. Una solución es todo par de números que cumple la ecuación.

Los sistemas de ecuaciones lineales los podemos clasificar según su número de soluciones:

- ✓ Compatible determinado: Tiene una única solución, la representación son dos rectas que se cortan en un punto.
- ✓ Compatible indeterminado: Tiene infinitas soluciones, la representación son dos rectas que coinciden.
- ✓ Incompatible: No tiene solución, la representación son dos rectas paralelas.

Existen diferentes métodos de resolución:

- Método de GAUSS
- Método de Sustitución.
- Método de Reducción.
- Método de Igualación.

SISTEMA DE ECUACIONES: Método de igualación

El método de **igualación** se basa en el principio de **transitividad**.

Si $a = b$ y luego $b = c$,

entonces, por **transitividad** se sabe que $a = c$.

Ejemplo:

Si $a = b + c$ y sabemos que $b + c = d$, entonces podemos afirmar que $a = d$.

Lo mismo ocurre en un sistema de ecuaciones usando este método, como se muestra a continuación.
Paso 1: Seleccionamos una variable que exista en cada una de las ecuaciones del sistema.
Paso 2: Despejamos la variable en cada una de las ecuaciones.

Ejemplo: $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

Podemos despejar cualquiera de las 2 variables, en este caso hemos elegido x. Recuerda hacerlo en cada una de las ecuaciones.

$2x + 4y = 10 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{10 - 4y}{2}$

$x + 3y = 7 \quad \rightarrow \quad x = 7 - 3y$

Podemos observar que ambas ecuaciones están igualadas con x, así que por transitividad decimos que:

Si $x = \dfrac{10 - 4y}{2}$ y $x = 7 - 3y$, entonces

$\dfrac{10 - 4y}{2} = 7 - 3y.$

Podemos observar que ahora solo nos queda una ecuación con una sola variable, la cual podemos simplificar y despejar, obteniendo:

$\dfrac{10 - 4y}{2} = 7 - 3y$

$10 - 4y = 2(7 - 3y)$

$10 - 4y = 14 - 6y$

$2y = 4$

$y = 2$

Ahora sustituimos el valor de y en cualquiera de las 2 ecuaciones para obtener el valor de x

$x + 3(2) = 7$

$x + 6 = 7$

$x = 7 - 6$

$x = 1$

Método de Sustitución

El método de sustitución consiste en aislar en una ecuación una de las dos incógnitas para sustituirla en la otra ecuación.
Este método es aconsejable cuando una de las incógnitas tiene coeficiente 1.

Ejemplo

$$\begin{cases} 4 + x = 2y \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

1. Aislamos una incógnita

Vamos a aislar la x de la primera ecuación. Como su coeficiente es 1, sólo tenemos que pasar el 4 restando al otro lado:

$$4 + x = 2y \rightarrow$$
$$x = 2y - 4$$

2. Sustituimos la incógnita en la otra ecuación

Como tenemos que la incógnita x es igual 2y-4, escribimos 2y-4 en lugar de la x en la segunda ecuación (sustituimos la x):

$$\begin{aligned} &2x - y = 1 \quad \rightarrow \\ &2 \cdot (2y - 4) - y = 1 \rightarrow \\ &4y - 8 - y = 1 \end{aligned}$$

Observad que hemos utilizado paréntesis porque el coeficiente 2 tiene que multiplicar a todos los términos.

3. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$\begin{aligned} &4y - 8 - y = 1 \rightarrow \\ &3y - 8 = 1 \quad \rightarrow \\ &3y = 9 \quad \rightarrow \\ &y = \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

Ya sabemos una incógnita: y=3.

4. Calculamos la otra incógnita sustituyendo:

Al despejar la incógnita x teníamos

$$x = 2y - 4$$

Como conocemos y=3, sustituimos en la ecuación:

$$x = 2y - 4 \quad \rightarrow$$
$$x = 2 \cdot 3 - 4 \rightarrow$$
$$x = 6 - 4 = 2$$

Por tanto, la otra incógnita es x=2.

La solución del sistema es

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

El método de Gauss

El método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones en otro equivalente de forma que éste sea escalonado.

Obtenemos sistemas equivalentes por eliminación de ecuaciones dependientes. Si:

- Todos los coeficientes son ceros.
- Dos filas son iguales.
- Una fila es proporcional a otra.
- Una fila es combinación lineal de otras.

Criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones:

1. Si a ambos miembros de una ecuación de un sistema se les suma o se les resta una misma expresión, el sistema resultante es equivalente.
2. Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de las ecuaciones de un sistema por un número distinto de cero, el sistema resultante es equivalente.
3. Si sumamos o restamos a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo sistema, el sistema resultante es equivalente al dado.
4. Sin en un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumar las dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos, resulta otro sistema equivalente al primero.
5. Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas, resulta otro sistema equivalente.

Método de Gauss utilizando matrices

Para facilitar el cálculo vamos a transformar el sistema en una matriz, en la que pondremos los coeficientes de las variables y los términos independientes (separados por una recta).

Se denomina matriz a todo conjunto de números o expresiones dispuestos en forma rectangular, formando filas y columnas. El número de filas y columnas de una matriz se denomina dimensión de una matriz.

Una matriz A de m filas y n columnas podemos denotarla como $A_{m\times n}$ (siempre el número de la izquierda en el subíndice indica las filas, mientras que el de la derecha las columnas) o (a_{ij}) (está entre paréntesis), y un elemento cualquiera de la misma, que se encuentra en la fila i y en la columna j, por a_{ij} (no lleva paréntesis). Un elemento se distingue de otro por la posición que ocupa, es decir, la fila y la columna a la que pertenece.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tipos de sistemas:

- Si hay una única solución (un valor para cada incógnita), decimos que el sistema es **compatible determinado (SCD)**.

- Si hay varias soluciones (en realidad, son infinitas), decimos que es **compatible indeterminado (SCI)**.

- Si no hay ninguna solución (esto ocurre cuando dos o más ecuaciones no pueden verificarse al mismo tiempo o cuando hay alguna ecuación imposible como $0 \cdot x = 1$), decimos que es **incompatible (SI)**.

  Por ejemplo, el siguiente sistema es incompatible porque como $y = 0$, por la segunda ecuación tenemos $x = 0$, pero por la tercera, $x = 1$:

$$\begin{cases} y & = & 0 \\ 2x + y & = & 0 \\ 2x + y & = & 2 \end{cases}$$

Operaciones elementales fila

Dada una matriz, llamamos **operaciones elementales filas** a las siguientes operaciones:

- Multiplicar toda una fila por un escalar no nulo.
- Intercambiar el orden de dos filas.
- Sumar a una fila el resultado de multiplicar otra fila por un escalar.

En el siguiente apartado definimos la matriz ampliada de un SEL. Al realizar operaciones elementales fila sobre esta matriz, lo hacemos sobre las ecuaciones del sistema.

También, se pueden realizar operaciones elementales columna, pero omitimos este procedimiento porque esto supone intercambiar el orden de los sumandos de las ecuaciones del SEL.

Método de resolución

La **matriz ampliada** del sistema $AX = b$ es la matriz formada por las matrices A y b, separadas normalmente por una raya:

$$A^* = (A|b)$$

La fila i de la matriz ampliada contiene los coeficientes de las incógnitas y el término independiente de la ecuación i del sistema.

Con todo lo visto, ya podemos explicar el método de eliminación de Gauss y el de Gauss-Jordan.

Eliminación de Gauss y de Gauss-Jordan:

Dado un sistema $AX = b$, el método de **eliminación de Gauss** consiste en hallar la **forma escalonada** de la matriz ampliada del sistema, $A^* = (A|b)$.

Al terminar, tendremos la matriz (triangular superior) ampliada de un sistema de ecuaciones equivalente (con la o las mismas soluciones) mucho más sencillo de resolver. Aplicaremos el teorema de Rocuhé-Frobenius (enunciado más adelante) para determinar el tipo de sistema. Finalmente, resolveremos el sistema (si es compatible).

> Dado un sistema $AX = b$, el método de **eliminación de Gauss-Jordan** consiste en hallar la **forma escalonada reducida** de la matriz ampliada del sistema, $A^* = (A|b)$.

La diferencia entre los métodos de Gauss y de Gauss-Jordan es que el primero finaliza al obtener un sistema equivalente en forma escalonada, mientras que el segundo finaliza al obtener un sistema equivalente en forma escalonada reducida.

Nota: las definiciones de forma escalonada y forma escalonada reducida de una matriz podéis encontrarlas en matrices equivalentes.

Teorema de Rocuhé-Frobenius:

Sea $A \cdot X = b$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas (sobre un cuerpo en general), siendo m y n naturales (no nulos):

- $A \cdot X = b$ es **compatible** si, y sólo si, $rango(A) = rango(A \mid b)$.
- $A \cdot X = b$ es compatible **determinado** si, y sólo si, $rango(A) = n = rango(A \mid b)$.
- Si los rangos son distintos, el sistema es **incompatible**.

Sistemas resueltos por Gauss

Sistema 1 (dimensión 2x2)

$\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ -3x + 3y = 2 \end{cases}$ La matriz ampliada del sistema es $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 15 \end{array}\right)$

La raya vertical separa la matriz de coeficientes de la matriz columna de términos independientes.

Realizamos operaciones elementales fila para obtener la matriz en forma escalonada reducida:

Multiplicamos la primera fila por 1/5 y la segunda por 1/3: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2/5 & 3/5 \\ -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Sumamos a la segunda fila la primera: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2/5 & 3/5 \\ 0 & 7/5 & 28/5 \end{array}\right)$ Multiplicamos la segunda fila por 5/7: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$

Sumamos a la primera fila la segunda fila multiplicada por -2/5: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$

Esta última matriz equivalente ya tiene forma escalonada reducida y nos permite ver rápidamente los rangos de la matriz de coeficientes y de la ampliada.

Calculamos los rangos de la matriz coeficientes y de la matriz ampliada $rango\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) = 2$ $rango\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Como los rangos son iguales y máximos, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es **compatible determinado**. La matriz obtenida representa el sistema

$\begin{matrix} x = -1 \\ y = 4 \end{matrix}$ Es la solución del sistema.

Sistema 2 (dimensión 3x3)

$$\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema es $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$ Es una matriz de dimensión 3x4.

Multiplicamos la primera fila por 1/5: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$ Sumamos a la segunda y tercera fila la primera multiplicada por -2:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & -1 & -4/5 \\ 0 & 11/5 & -1 & 11/5 \end{array}\right)$ Multiplicamos las filas segunda y tercera por 5: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 11 & -5 & 11 \end{array}\right)$

Sumamos a la segunda fila la tercera multiplicada por -1: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & -10 & 0 & -15 \\ 0 & 11 & -5 & 11 \end{array}\right)$

Multiplicamos la segunda fila por -1/10 y la tercera por 1/11:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -5/11 & 1 \end{array}\right)$$

Sumamos a la primera fila la segunda multiplicada por -2/5 y a la tercera, la segunda por -1: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -5/11 & -1/2 \end{array}\right)$

Multiplicamos la tercera fila por -11/5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/10 \end{array}\right)$$

Esta última matriz tiene forma escalonada reducida (es la matriz identidad). Realmente, ya tenemos la solución del sistema, así que es un sistema compatible determinado.

No obstante, calculamos los rangos:

$$rango\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/10 \end{array}\right) = 3 \qquad rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

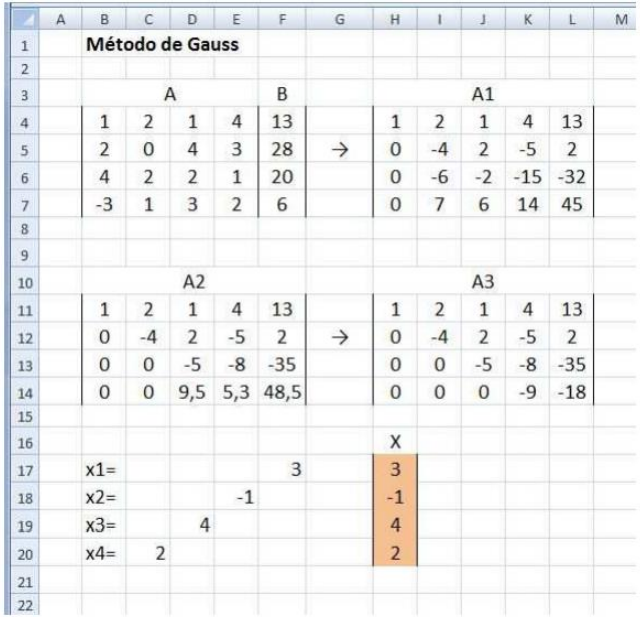
Como los rango son iguales y máximos, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es **compatible determinado**. La matriz obtenida proporciona la solución del sistema:

$$x = -1/5$$
$$y = 3/2$$
$$z = 11/10$$

Método de Gauss utilizando Microsoft Excel

Ejemplo 1.- Hallar la solución del sistema de ecuaciones lineales del sistema lineal a continuación aplicando el Método de Gauss. Solución.

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + x_3 + 4\,x_4 = 13 \\ 2\,x_1 + 4\,x_3 + 3\,x_4 = 28 \\ 4\,x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\ -3\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 = 6 \end{cases}$$



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Método de Gauss										
3			A		B				A1		
4	1	2	1	4	13		1	2	1	4	13
5	2	0	4	3	28	→	0	-4	2	-5	2
6	4	2	2	1	20		0	-6	-2	-15	-32
7	-3	1	3	2	6		0	7	6	14	45
10			A2						A3		
11	1	2	1	4	13		1	2	1	4	13
12	0	-4	2	-5	2	→	0	-4	2	-5	2
13	0	0	-5	-8	-35		0	0	-5	-8	-35
14	0	0	9,5	5,3	48,5		0	0	0	-9	-18
16							X				
17	x1=				3		3				
18	x2=			-1			-1				
19	x3=		4				4				
20	x4=	2					2				

En este caso y siguiendo los pasos se tiene:

i.- Se escribe la matriz ampliada en “B4:F7”

ii.- Se copia la matriz anterior a la posición “H4:L7” y en esta matriz que se denomina A1 se hacen cero los coeficientes a_{i1} para cada fila i-ésima, con $i > 1$. Así para el caso a_{21}, hay que restar a la segunda fila la primera fila multiplicada por el multiplicador, a_{21}/a_{11}. Por tanto en la celda “H5”, la fórmula a introducir es la siguiente “=B5-(B5/B4)*B4”, de igual forma para las filas tercera y cuarta, las fórmulas en H6 e H7 son “=B6-(B6/B4)*B4” y “=B7-(B7/B4)*B4”.

iii.- Se copia la matriz anterior a la posición “B11:F14” y en esta matriz que se denomina A2 se hacen cero los coeficientes a_{i2} para cada fila i-ésima, con $i > 2$, de igual forma que en el paso anterior. Una vez más se copia la matriz obtenida a la

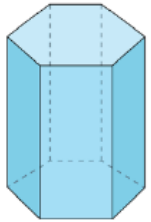
posición “H11:L14”, obteniendo la matriz A3, en la que se hacen cero los coeficientes a_{i3} para cada fila i-ésima, con $i > 3$.

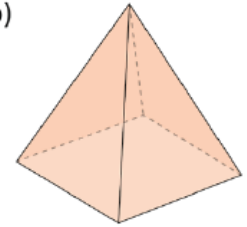
Una vez obtenida la matriz triangular, A3, se puede utilizar el método de sustitución regresiva, introducimos las fórmulas que se corresponden con la ecuación (7), es decir, en la celda “C20” se introduce “=L14/K14”, en “D19” se introduce, “=(L13-K13*C20)/J13”, en “E18” se introduce “=(L12-K12*C20-J12*D19)/I12”, y en “F17” se introduce “=(L11-K11*C20-J11*D19-I11*E18)/H11”.De esta forma se llega a la solución final.

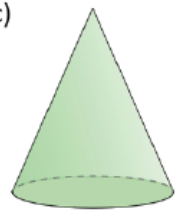
Características y elementos del cono y la esfera

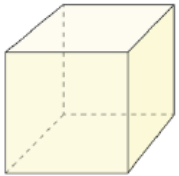
① P

Escribe las características de los siguientes cuerpos geométricos:

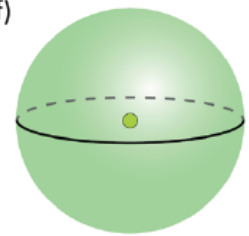
a) 

b) 

c) 

d) 

e)

f) 

② S

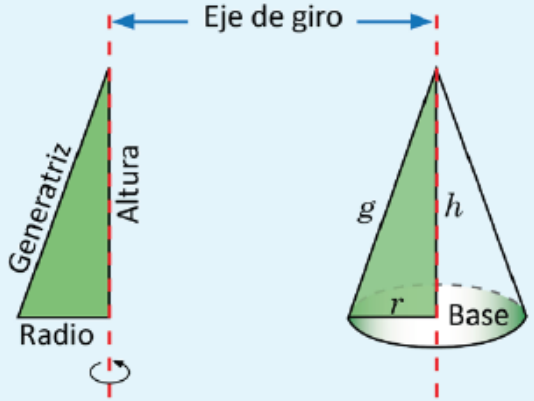
a) Tiene dos bases poligonales y sus caras son planas.
b) Tiene una sola base y una cúspide, además sus caras son planas.
c) Está formado por una sola cara plana circular, un vértice y su cara lateral es curva.
d) Todas sus caras son planas y cuadradas.
e) Tiene dos bases circulares y su cara lateral es curva.
f) Es una superficie totalmente curva, no tiene caras laterales ni bases.

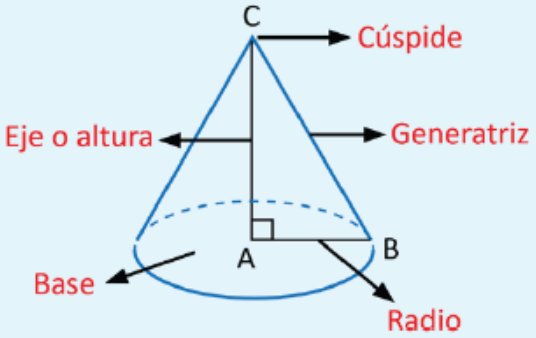
El **cono** es un sólido limitado por un círculo y por una superficie curva.

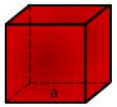
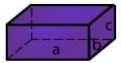
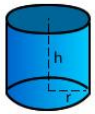
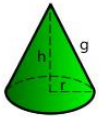
El cono puede verse como una superficie de revolución. La figura plana que se gira para generar el cono es un triángulo rectángulo y el eje de rotación es uno de los catetos del triángulo.

Los elementos que componen un cono son:

- Generatriz (g): es la línea que mediante la rotación genera el cono.
- Base: cara circular sobre la cual se apoya el cono.
- Radio (r): radio de la base.
- Vértice o cúspide.
- Altura (h): segmento que une el vértice y el centro de la base. La altura está contenida en el eje de giro.



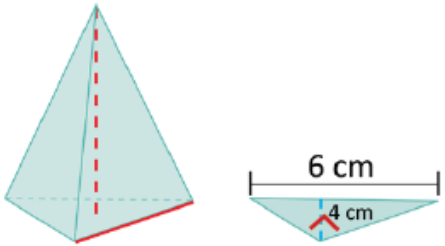


NOMBRE	IMAGEN	ÁREA	VOLUMEN
Cubo o Hexaedro		$A=6a^2$	$V=a^3$
Paralelepípedo o Ortoedro		$A=2(ab+ac+bc)$	$V=abc$
Pirámide		$A=A_{base}+A_{lateral}$	$V=\frac{1}{3}b \cdot h$
Cilindro		$A=2\pi r(h+r)$	$V=\pi r^2 \cdot h$
Cono		$A_{total}=\pi r^2+\pi r g$	$V=\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$
Esfera		$A=4\pi r^2$	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

Volumen de la pirámide triangular

① **P**

Calcula el volumen de una pirámide de base triangular, si su base tiene las dimensiones mostradas en la figura y la altura de la pirámide es 7 cm.



Observa que la base en este ejemplo es triangular.

② **S**

Se sabe que el volumen de una pirámide es igual a $V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_B \times h$ y como en este caso la base es un triángulo, entonces el área de la base es:

$$A_B = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = \frac{6 \times 4}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

Luego, el volumen de la pirámide es: $V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times 12 \times 7 = 28 \text{ cm}^3$.

C

El volumen de la pirámide triangular, se determina de manera similar al de la pirámide cuadrangular $V_{pirámide} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$. En general, para una pirámide de base cualquiera el volumen se calcula de manera similar.

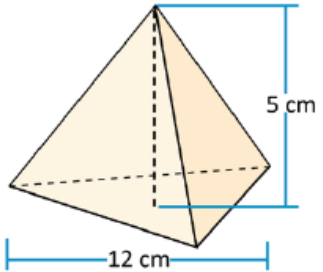
③ **E**

¿Cuál es el volumen de la pirámide mostrada si la altura del triángulo de la base es de 6 cm?

El área de la base es $A_B = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = \frac{12 \times 6}{2} = 36\ cm^2$.

Por tanto, el volumen de la pirámide es:

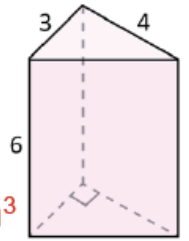
$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_B \times h = \frac{1}{3} \times 36 \times 5 = 60\ cm^3.$$



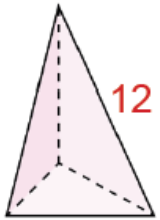
④

1. Para cada uno de los casos, calcula el volumen del prisma y luego el volumen de la respectiva pirámide:

a)

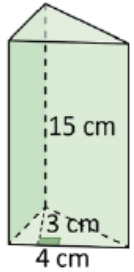


36 cm^3

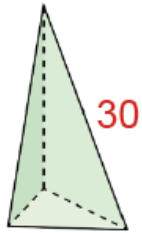


12 cm^3

b)



90 cm^3



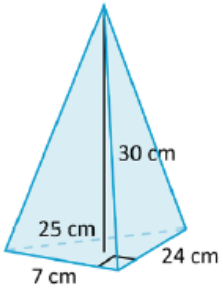
30 cm^3

2. Encuentra el volumen de una pirámide cuya base es 25 cm^2 y su altura es 9 cm.

75 cm^3

3. Encuentra el volumen de una pirámide cuyos lados del triángulo rectángulo, se muestran en la figura, y la altura de la pirámide mide 30 cm.

840 cm^3



Estadística descriptiva

G R A C I A S

Línea de atención al ciudadano: 018000 910270
Línea de atención al empresario: 018000 910682

@SENAcomunica

www.sena.edu.co